



Välkommen till

ARBETSBLAD.SE

Logisk struktur. Kognitivt lugn. Genomarbetad kvalitet.

Tack för att du valt material från **arbetsblad.se**. Allt material är pedagogiskt hantverk, specifikt framtaget från grunden och utvecklat för svenska förhållanden.

Pedagogiska tankar och koppling till läroplanen

Arbetsbladen är utformade enligt det jag kallar *tvådimensionell funktionalism*: en ren och avskalad design som minimerar kognitiv belastning, sparar bläck och låter fokus ligga på den pedagogiska uppgiften.

Tanken är att skapa ett medvetet minimalistiskt uttryck där form och innehåll samverkar för att stödja koncentration och arbetsro, minska visuella distraktioner och ge utrymme för en grundläggande aspekt av lärande: kopplingen mellan hand, öga och hjärna.

Mycket av materialet bygger på färdighetsträning, upprepning och igenkänning – arbetssätt som ligger i linje med läroplanens betoning av befästande, progression och långsiktigt lärande. Jag tror inte på spelifiering och externa belöningsystem, men värdesätter såklart den inre motivationen och pedagogiken som kan finnas i ett bra spel. Målet är att locka fram den inneboende glädjen i aha-upplevelser, kunskaper och färdigheter, och bygga en grund för vidare utveckling.

Arbetsbladen är avsedda att användas som ett komplement till lärarledd undervisning och gemensamma genomgångar. Hoppas att de kommer till god nytta!

Licens och upphovsrätt

Allt material är skyddat enligt upphovsrättslagen. Köp av detta material ger dig en **personlig och enskild föräldra-/lärarlicens** för användning i din egen familj/elevgrupp. **Utskrifter och kopiering** får ske obegränsat för egna elever. **Delning** med andra är inte tillåten, materialet får inte heller **modifieras, ändras eller säljas vidare**. Se till att informationen i sidfoten finns kvar.

Det hjälper enormt i arbetet med nya arbetsblad om filerna inte sprids hej vilt – hänvisa istället alla intresserade till **arbetsblad.se**; det gäller inte minst för gratismaterial. Det är viktigt att vi respekterar och värdesätter varandras arbete.

Hej! Det är jag, **Bo König**, som står bakom **arbetsblad.se**. Jag är tvåbarnsfar, civilingenjör, lundabo, motvilligt förtjust i L^AT_EX och har tidigare arbetat som bland annat webbutvecklare, översättare och gymnasielärare.

Alla synpunkter, frågor, förslag på förbättringar eller önskemål om specifika teman är varmt välkomna. Speciella skol- eller kommunlicenser samt olika unika anpassningar av innehåll och utseende (med logotyper etc.) löser jag med glädje. Kontakta mig via e-post: **info@arbetsblad.se**.

Tack, igen. Ditt stöd och din feedback är avgörande för utvecklingen.



OPERANDUM

Ett klurigt tärningsspel

Operandum är ett utforskande och kreativt spel där spelarna, antingen enskilt eller tillsammans, fördjupar förståelsen för tal och samband.

Genom att laborera med operander och tärningsslag utvecklas förmågan att analysera matematiska uttryck och upptäcka hur operationernas inbördes ordning och användning av parenteser påverkar resultatet. Algebraisk struktur och prioriteringsregler kombinerat med utforskande nyfikenhet.

Antal spelare:	1–många (men fler än fyra är kanske lite väl många).
Material:	5 tärningar, penna och protokollark (sista sidan i detta dokument).
Målgrupp:	Grundskolan och äldre. Utmärkt för mellanstadiet. (Lågstadiet med anpassningar.)

I *Operandum* får vi slumpvisa tal (*operander*) som ska kombineras med hjälp av de fyra räknesätten för att försöka nå ett målvärde.

Det handlar inte om att bli ”färdig” snabbast, utan om att se mönster, träna prioriteringsregler, diskutera matematik och utveckla matematisk nyfikenhet.

Anvisningar

- Slå två tärningar och skriv upp antalet ögon i de första två kolumnerna i protokollarket. Multiplicera (eller addera) resultaten för att bestämma **målvärdet** för omgången och skriv det i den tredje kolumnen.
- Slå fem tärningar för att få de tal ni ska arbeta med, **operanderna**. Skriv in dem i de fem *Operander*-rutor. (Det underlättar ofta att sortera dem i storleksordning.)
- Nu kommer vi till själva utmaningen: välj bland de fem operanderna (de fem tärningstalen), de fyra räknesätten (+, −, ·, :) och använd parenteser (vid behov) för att **skapa uttryck som är lika med målvärdet**. Använd minst två operander — ju fler som används, desto högre poäng.
- Kom ihåg att parenteserna är era vänner — de är verktyget för att ändra prioriteringsordningen mellan operanderna och styra beräkningen mot målvärdet.
- Försök hitta flera *unika* lösningar, det vill säga olika sätt att kombinera operanderna för att nå målvärdet. Skriv varje uttryck på en egen rad.
- Varje *korrekt och unik* lösning ger poäng beroende på hur många operander som använts:

2 operander: 1 poäng	3 operander: 3 poäng	4 operander: 6 poäng	5 operander: 10 poäng
----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------
- Om ni helt kör fast och inte lyckas hitta någon lösning alls så kan ni slå en tärning till och använda som ”**livlina**”. Då får ni enbart 2 poäng per lösning, oavsett hur många operander som används.
- Samtala om era lösningar. Finns det olika sätt att nå målet med samma operander? Är alla lösningar korrekta? Är alla unika? Vilken eller vilka lösningar ger flest poäng?



Vad är unika lösningar?

Om målvärdet är 20 och bland operanderna finns 1, 1, 3 och 4 så är det här två exempel på lösningar:

$$(1 + 3 + 1) \cdot 4 \qquad (1 + 3) \cdot (1 + 4) \qquad (1)$$

Men hur är det med följande tre uttryck – är det någon egentlig skillnad mellan dem?

$$(1 + 3) \cdot (1 + 4) \qquad (1 + 4) \cdot (1 + 3) \qquad (3 + 1) \cdot (4 + 1) \qquad (2)$$

Ska uttrycken i (2) räknas som unika lösningar även om det ”bara” är termer eller faktorer som bytt plats? Nej, då är det inte unika lösningar.

Men om de två lösningarna i rad (2) inte är unika, hur kommer det sig att de på rad (1) är det? Överallt används ju samma uppsättning operander (1, 1, 3, 4).

Skillnaden ligger i att de använder operanderna på olika sätt. Det första uttrycket i rad (1) summerar tre termer (1, 3, 1) innan multiplikationen, det andra uttrycket multiplicerar två separata summor. I rad (2) är skillnaden mellan uttrycken mycket mindre: antingen har parenteserna med innehåll bytt plats, eller så har operanderna inom parenteserna bytt plats. Den kommutativa lagen säger att *ordningen inte spelar någon roll vid addition eller multiplikation*, så $1 + 3$ är samma sak som $3 + 1$.

På rad (1) finns alltså två unika lösningar, men på rad (2) är det enbart en unik lösning (och två uttryck där operanderna kastats runt). Rad (1) ger $6 + 6 = 12$ poäng, rad (2) ger $6 + 0 + 0 = 6$ poäng.

Matematiska lagar

För att avgöra om två lösningar är unika eller bara ”omkastningar”, kan vi luta oss mot två grundläggande lagar, **kommutativa lagen** och **associativa lagen**. (Det är krångliga namn på helt grundläggande men ganska enkla egenskaper hos addition och multiplikation.)

Kommutativa lagen för addition

Summan av två tal förändras inte om man byter plats på talen. $a + b = b + a$

Exempel: $1 + 3 = 3 + 1 = 4$

Kommutativa lagen för multiplikation

Produkten av två tal förändras inte om man byter plats på talen: $a \cdot b = b \cdot a$

Exempel: $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 20$

Associativa lagen för addition:

Hur talen grupperas med parenteser påverkar inte summan: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Exempel: $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10$

Associativa lagen för multiplikation:

Hur talen grupperas med parenteser påverkar inte produkten: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Exempel: $(4 \cdot 5) \cdot 2 = 4 \cdot (5 \cdot 2) = 40$

Vid addition och multiplikation kan talen

★ **byta plats**

★ **grupperas på olika sätt**

utan att resultatet förändras.

Vi kan alltså kasta om talen, operanderna, hej vilt så länge det enbart är addition och multiplikation. I Operandum räknas lösningar som identiska om de bara skiljer sig åt genom kommutativa eller associativa lagar. En unik lösning uppstår oftast när du hittar en helt ny prioritetsordning eller kombination av operander.



Exempel

Börja med att skriva ut ett protokollark för Operandum (sista sidan i detta dokument) och leta fram fem sexsidiga tärningar (eller använd slattarning.nu/?m=operandum).



Vi slår först två tärningar och fyller i resultatet i *T1* och *T2*. I vårt exempel slår vi och och skriver alltså in 3 och 5. Vi skriver samtidigt summan $3 + 5 = 8$ i rutan för *Målvärde*.

Protokollark

T1	T2	Målvärde	Operander (tal från tärningar)					Livlina
3	5	8						

Därefter slår vi fem tärningar för att få fram våra operander. Sorterade i storleksordning får vi , , , och , vilket vi skriver in i rutorna. (Vi gissar att talen är tillräckligt varierade för att vi inte ska behöva använda livlinan.)

T1	T2	Målvärde	Operander (tal från tärningar)					Livlina
3	5	8	1	1	4	5	5	—

Det är alltså dessa fem tal – 1, 1, 4, 5 och 5 – vi ska kombinera på olika sätt för att nå målvärdet 8.

Vi hittar ett första sätt ganska snabbt. $5 + 4 = 9$ och sedan drar vi bort en etta:

	Ekvation	Kontroll	Poäng
1	$5 + 4 - 1$		

Vi kan också dra nytta av den andra ettan för att enkelt skapa en ny ekvation, även om det nästan känns lite väl simpelt.

2	$(5 + 4 - 1) \cdot 1$		
---	-----------------------	--	--

Vi hittar ganska snabbt ytterligare en ekvation:

3	$(1 + 1) \cdot 4$		
---	-------------------	--	--

Vi använder de två femmorna för att addera noll:

4	$(1 + 1) \cdot 4 + 5 - 5$		
---	---------------------------	--	--



Genom att fortsätta bolla runt med operanderna, fundera och räkna hittar vi ytterligare fyra ekvationer:

5	$5 + 5 + 1 + 1 - 4$		
6	$5 + 5 - 1 - 1$		
7	$(1 + 5 / 5) \cdot 4$		

Så vi har nu hittat sju unika lösningar och kan börja räkna ut poängen. Samtidigt kontrollerar vi varje ekvation så att vi har räknat rätt.

Ekvation 1 använder 3 operander och ger enligt tabellen 3 poäng. Ekvation 2 använder 4 operander och ger 6 poäng – och så vidare. Vi fyller i resten av protokollet och räknar samman totalpoängen.

	Ekvation	Kontroll	Poäng
1	$5 + 4 - 1$	OK	3
2	$(5 + 4 - 1) \cdot 1$	OK	6
3	$(1 + 1) \cdot 4$	OK	3
4	$(1 + 1) \cdot 4 + 5 - 5$	OK	10
5	$5 + 5 + 1 + 1 - 4$	OK	10
6	$5 + 5 - 1 - 1$	OK	6
7	$(1 + 5 / 5) \cdot 4$	OK	6

Totalpoäng:

44

44 poäng är inte så illa! Vi har hittat maximala sju unika lösningar, men kanske kan vi optimera vår totalpoäng ytterligare genom att använda fler operander i någon eller några ekvationer ...? Eller ska vi kanske ta fram ett nytt protokoll och slå tärningarna igen för att få en ny utmaning?

Kom ihåg: syftet med *Operandum* är att träna det utforskande och kreativa matematiska tänkandet. Processen är målet.

Mycket nöje!



Operandum

Protokollark

T1	T2	Målvärde	Operander (tal från tärningar)					Livlina

	Ekvation	Kontroll	Poäng
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Totalpoäng:

2 operander	3 operander	4 operander	5 operander	Livlina
1 poäng	3 poäng	6 poäng	10 poäng	2 poäng/lösning

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

